約数問題とRiemannゼータ関数の二乗平均値問題についての補足的サーヴェイ (解析数論の展望と諸問題)

松本, 耕二

数理解析研究所講究録 1219 巻 2001 年 17-32

約数問題とRiemannゼータ関数の二乗平均値問題についての補足的サーヴェイ

名古屋大学・多元数理 [Graduate School of Mathematics Nagoya University]
松本 耕二 (Kohji Matsumoto)

Abstract: This is a supplement of a part of the author's survey paper [12]. We report recent results on the remainder terms $\Delta(x)$, $\Delta_{1-2\sigma}(x)$, $E(t)$ and $E_\sigma(t)$. In particular we claim that the "real" remainder terms in the mean square formula for the Riemann zeta-function are not $E(t)$ and $E_\sigma(t)$, but $E(t)-\pi$ and $E_\sigma(t)+2\pi\zeta(2\sigma-1)$, and mention recent works of Y.-K. Lau which support this observation.

§1. 序論

自然数 n の正の約数の個数 $d(n)$ に対し，漸近公式

$$(1.1)\qquad \sum_{n\le x}{}' d(n) = x\log x + (2\gamma-1)x + \frac{1}{4} + \Delta(x)$$

(但し γ はEuler定数，また Σ' は $x\in\mathbb{Z}$ のとき末項 $d(x)$ を $\frac{1}{2}d(x)$ で置きかえることを意味する) の残余項 $\Delta(x)$ の挙動の研究は Dirichlet 以来行なわれていて，$\Delta(x)=O(x^{1/2})$

(Dirichlet), $O(x^{1/3}\log x)$ (Voronoï), $O(x^{23/73+\varepsilon})$ (Huxley) といった評価が示されてきた。一方，Riemann ゼータ関数 $\zeta(s)$ の $\sigma(=\mathrm{Re}\, s)=\frac{1}{2}$ の線上での二乗平均値も Hardy, Littlewood の頃からの研究対象で，

$$(1\cdot 2)\quad \int_0^t |\zeta(\tfrac{1}{2}+iu)|^2 du = t\log t-(1+\log 2\pi-2\gamma)t+E(t)$$

で定まる $E(t)$ に対しやはり $O(t^{1/3+\varepsilon})$ (Balasubramanian), $O(t^{72/227+\varepsilon})$ (Huxley) が知られている。一方 $\Delta(x)=\Omega(x^{1/4})$, $E(t)=\Omega(t^{1/4})$ もよく知られていて，このことから

(1·3) (Conjecture) $\Delta(x)=O(x^{1/4+\varepsilon})$, $E(t)=O(t^{1/4+\varepsilon})$ ($\forall\varepsilon>0$)

と予想されている。以上の (1·1), (1·2), (1·3) などを見れば，$\Delta(x)$ と $E(t)$ の間に顕著なアナロジーが存在することは一目瞭然である。

さて $\zeta(s)$ については $\sigma=\frac{1}{2}$ のみならず，$0<\sigma<1$ なる帯領域での挙動の研究が大変重要である。ここでは $\frac{1}{2}<\sigma<1$ に考察を限定しよう。この領域での二乗平均値

$$(1\cdot 4)\quad \int_0^t |\zeta(\sigma+iu)|^2 du = \zeta(2\sigma)t+(2\pi)^{2\sigma-1}\frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}t^{2-2\sigma}+E_\sigma(t)$$

の残余項 $E_\sigma(t)$ の研究は筆者の 1989 年の論文に始まるから歴史は比較的短い。後述するようにまだわかっていないことも多く，この方向の最新の状況を報告するのが本稿の主目的で

ある。しかしその前に，$E_\sigma(t)$ に対しても約数問題におけるアナロジーが存在することに注意しておく。それは

$$(1.5)\quad \sum_{n\le x}{}' \sigma_{1-2\sigma}(n) = \zeta(2\sigma)x + \frac{\zeta(2-2\sigma)}{2-2\sigma}x^{2-2\sigma} - \frac{1}{2}\zeta(2\sigma-1) + \Delta_{1-2\sigma}(x)$$

$\left(\frac{1}{2}<\sigma<1,\ \sigma_{1-2\sigma}(n) = \sum_{d|n} d^{1-2\sigma}\right)$ というものである。一般的にいって約数問題の方が簡単なので，まずは $\Delta(x)$, $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ に関する話題から話を始めることにする。($\Delta(x)=\Delta_0(x)$ に注意.)

§2. $\Delta(x)$ と $\Delta_{1-2\sigma}(x)$.

約数問題におけるひとつの基本的な道具は，$\Delta_{1-2\sigma}(x)$ を Bessel 関数を含む無限級数で表示する Voronoï 公式である。Bessel 関数の漸近展開表示と組み合わせると，それは次のような式になる：

$$(2.1)\quad \Delta_{1-2\sigma}(x) = \frac{1}{\sqrt{2}\pi}x^{\frac{3}{4}-\sigma}\sum_{n=1}^{\infty}\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-\frac{5}{4}}\Big\{\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$-\frac{1}{32\pi\sqrt{nx}}\left(16(1-\sigma)^2-1\right)\sin\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)\Big\} + O\left(x^{-\sigma-\frac{1}{4}}\right)\quad \left(\frac{1}{2}\le\sigma<\frac{3}{4}\right).$$

但し Voronoï 自身が証明したのは $\sigma=\frac{1}{2}$ (即ち $\Delta(x)=\Delta_0(x)$) の場合だけで，$\frac{1}{2}\le\sigma<\frac{3}{4}$ への一般化は Oppenheim による。また $\sigma\ge\frac{3}{4}$ の時には (2.1) の級数は発散してしまい，使い物にならなくなる。そこでしばしば，(2.1) を有限で切り落した形の式，いわゆる "truncated" form が用いられる：

$$(2\cdot2)\quad \Delta_{1-2\sigma}(x)=\frac{1}{\sqrt{2}\pi}x^{\frac34-\sigma}\sum_{n\le N}\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-\frac54}\cos\left(4\pi\sqrt{nx}-\frac{\pi}{4}\right)$$
$$+O(x^{\frac12-\sigma}N^{\sigma-\frac12+\varepsilon})+O(x^{\frac12+\varepsilon}N^{-\frac12})\quad\left(\begin{array}{c}1\ll N\ll x^A\\ \frac12\le\sigma<1\end{array}\right)$$

この形のものは収束の問題がないので，$\frac12\le\sigma<1$ の全域で成立するし，証明も(2·1)に比べるとかなりやさしい。しかしその分，(2·1)よりは含まれている情報量が少なくなってしまっていることに注意すべきである。

さて(2·2)を用いると，

$$(2\cdot3)\quad \int_2^X\Delta_{1-2\sigma}^2(x)\,dx=B_1(\sigma)X^{\frac52-2\sigma}+O(X^{\frac74-\sigma+\varepsilon})^{(*)}\quad\left(\frac12\le\sigma<\frac34\right)$$

を導出することができる。これは $\sigma=\frac12$ の時は Cramér の古い結果(1922)だが，$\frac12<\sigma<\frac34$ に対しては Kiuchi (1987) による。木内氏のこの論文は，$\Delta_{1-2\sigma}(x)$ に対する近年の研究の revival のきっかけとなったものである。上の(2·3)式が主要項として $B_1(\sigma)X^{\frac52-2\sigma}$（ここで $B_1(\sigma)$ は explicit に書き下せる 0 でない定数）を持つことから，直ちに $\Delta_{1-2\sigma}(x)=\Omega(x^{\frac34-\sigma})$ が従う。そこで予想(1·3)の前半，及び

$$(2\cdot4)\quad (\text{Conjecture})\ \Delta_{1-2\sigma}(x)=O(x^{\frac34-\sigma+\varepsilon})\quad\left(\frac12<\sigma<\frac34\right)$$

が自然に推測される。しかしながら，現在証明されている上

(*) この誤差項は，$\sigma=1/2$ のとき $O(X\log^4X)$（Preissmann, 1988），また $\frac12<\sigma<\frac34$ のとき $O(X)$（Meurman, 1996）に改良されている。

からの評価はこの予想には程遠い。筆者の知る限りでは Pétermann [14][15] の結果が最良であるが，それでも

(2·5) $$\Delta_{1-2\sigma}(x) = O(x^{\frac{2}{3}(1-\sigma)+\varepsilon})^{(*)} \qquad (\tfrac{1}{2} \le \sigma < 1)$$

を少しだけ改良しているにすぎない。

領域 $\frac{3}{4} \leqq \sigma < 1$ においては，Meurman (1996) が

(2·6) $$\int_2^X \Delta_{1-2\sigma}^2(x)\,dx = \begin{cases} B_0 X \log X + O(X) & (\sigma = \frac{3}{4}) \\ O(X) & (\frac{3}{4} < \sigma < 1) \end{cases}$$

を証明した。Meurman の証明は (2·2) 型の式を駆使したものであるが，$\frac{3}{4} < \sigma < 1$ においては $O(X)$ しか得られず，何らの Ω 結果も導き出せない。(**) このことは $\frac{3}{4} < \sigma < 1$ における Voronoï 型公式の効力の限界を感じさせる。

しかし約数問題に関しては，Voronoï 公式とは全く異なるタイプのもうひとつの基本的公式が，やはり古くから知られている。それは

(2·7) $$\Delta_{1-2\sigma}(x) = -G_{1-2\sigma}(x) - x^{1-2\sigma} G_{2\sigma-1}(x) + O(x^{\frac{1}{2}-\sigma})$$

(但し $G_a(x) = \sum_{n \le \sqrt{x}} n^a \psi(x/n)$, $\psi(x) = x - [x] - \frac{1}{2}$ ）というものであって，基本的なアイデアは Dirichlet にまでさかのぼるものである。Chowla は既に 1932 年，(2·7) を用いて，

(*) この評価は例えば，(2·7) 式を用いて，その右辺第一項には Vinogradov による評価 $G_a(x) = O(x^{\frac{1}{3}(a+1)+\varepsilon})$ $(-1 < a < 0)$ を，右辺第二項には Pétermann [14] の Theorem 1 の (2·10) を apply すれば得られる。別証としては筆者と Meurman が 1993 年に Lillafüred (ハンガリー) での Conference で発表した，convexity principle によるものがある。

(**) $\sigma = \frac{3}{4}$ の時は (2·6) から $\Delta_{-1/2}(x) = \Omega((\log x)^{1/2})$ を得る。

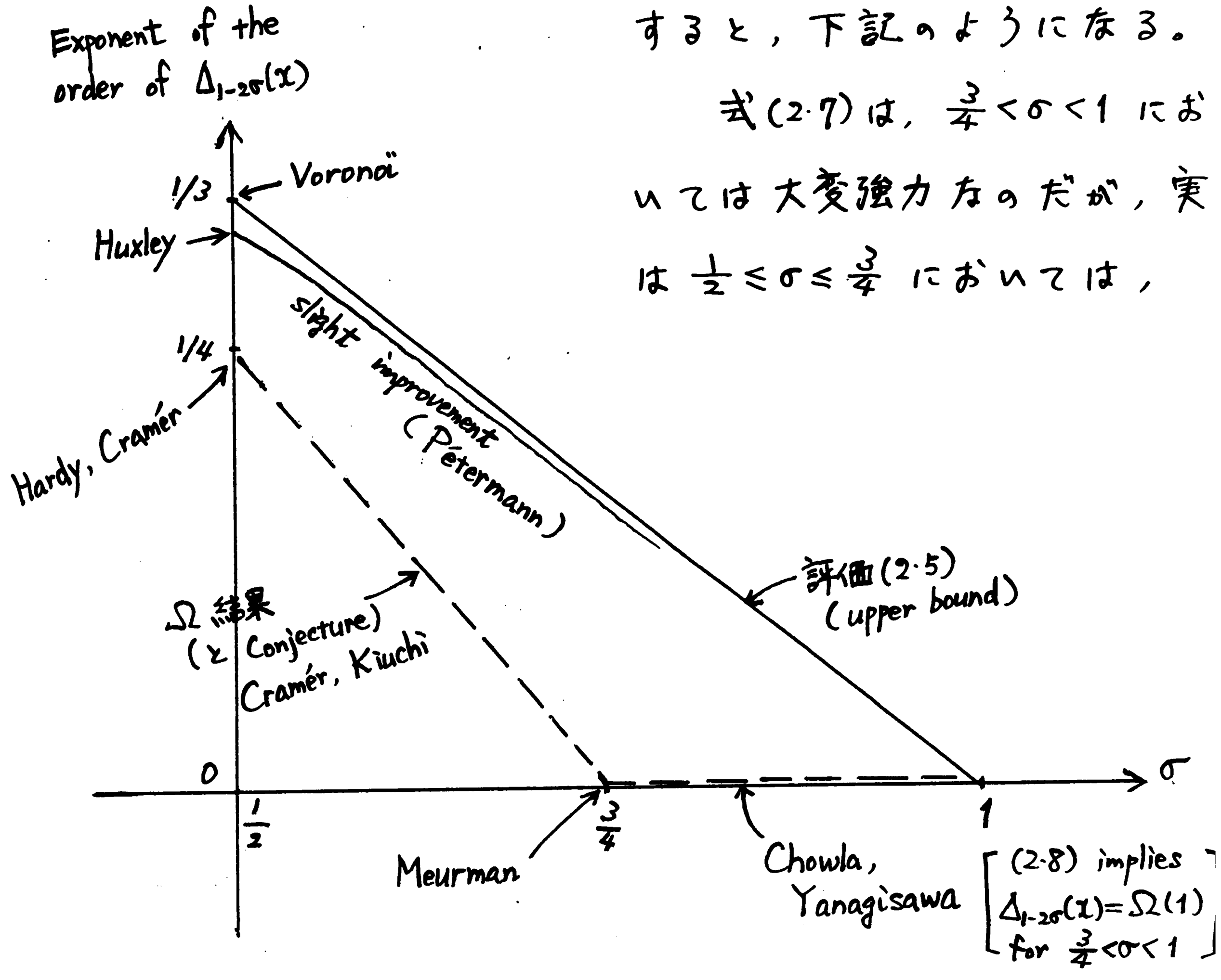
$$(2\cdot8)\quad \int_2^X \Delta_{1-2\sigma}^2(x)\,dx = B_2(\sigma)X + O(X^{\frac{5}{2}-2\sigma}\log X) \qquad (\tfrac{3}{4}<\sigma<1)$$

を示している。この式は最近，Yanagisawa (1998)によって，より一般的な形で再発見された。更にYanagisawa [17] は上記の残余項の中の $\log X$ を $(\log X)^{1-\frac{1}{3}(1-\sigma)(5-4\sigma)}$ に改良している。筆者は[12]において，(2·8)の残余項が実際には

$$(2\cdot9)\qquad B_3(\sigma)X^{\frac{5}{2}-2\sigma} + O(X^{2-2\sigma}(\log X)^c) \qquad (\tfrac{3}{4}<\sigma<1)$$

となっているだろうという予想を提示している。以上述べてきた一連の評価や予想を図示すると，下記のようになる。

式(2·7)は，$\frac{3}{4}<\sigma<1$ においては大変強力なのだが，実は $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq\frac{3}{4}$ においては，



Voronoï型公式の方が有効なようである。即ち，Tanigawa [16] においても強調されているように，使用すべき基本的道具が $\sigma=\frac{3}{4}$ の線を境界にして異なるものになっていることが認められるのである。

極く最近 Lau は，$\Delta_{1-2\sigma}(x)$ $(\frac{1}{2}<\sigma<1)$ について，$\Omega_\pm$ 型の結果[5][6]，差 $\Delta_{1-2\sigma}(x+h)-\Delta_{1-2\sigma}(x)$ の二乗平均(*)と sign change [5]，limit distribution [7][8] などについて多くの新結果を得ている。特に[7]では，Hattori-Matsumoto [1] に示唆されて，Kasahara [2] 型の Tauber 定理を用いる新しいアプローチを展開している。

§3. $E(t)$ と $E_\sigma(t)$

さて以下では，前節で述べた $\Delta(x)$, $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ に関する諸結果のアナロジーが，$E(t)$, $E_\sigma(t)$ についてどのように調べられているか，ということについて述べる。まず Voronoï 公式のアナロジーとして知られているのが次の Atkinson 型公式である。即ち，$\frac{1}{2}\le\sigma<1$ に対し（$E(t)=E_{1/2}(t)$ として）

$$
(3.1)\quad E_\sigma(t)=\sqrt{2}\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{3}{4}-\sigma}\sum_{n\le X}(-1)^n\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-\frac{5}{4}}\left(1+\frac{\pi n}{2t}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{2t}{\pi n}\right)^{-\frac{1}{2}}
$$
$$
\times\left(\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{\pi n}{2t}}\right)^{-1}\cos\left(2t\operatorname{arsinh}\sqrt{\frac{\pi n}{2t}}+(\pi^2n^2+2\pi nt)^{\frac{1}{2}}-\frac{\pi}{4}\right)
$$
$$
-2\left(\frac{t}{2\pi}\right)^{\frac{1}{2}-\sigma}\sum_{n\le B(t,X)}\sigma_{1-2\sigma}(n)n^{\sigma-1}\left(\log\frac{t}{2\pi n}\right)^{-1}\cos\left(t\log\frac{t}{2\pi n}-t+\frac{\pi}{4}\right)+O(\log t),
$$

(*) この問題については Kiuchi-Tanigawa の結果(1998)もある。

但し $t \ll X \ll t$, $\operatorname{arsinh} x = \log(x + \sqrt{1+x^2})$, また

$$B(t, X) = \frac{t}{2\pi} + \frac{1}{2}X - X^{\frac{1}{2}}\left(\frac{t}{2\pi} + \frac{1}{4}X\right)^{\frac{1}{2}}$$

である。この式は $\sigma = \frac{1}{2}$ の時 Atkinson (1949), $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$ の時は筆者(1989) による。それらの証明は Voronoï-Oppenheim の (2·1) を用いるので, $\sigma \geq \frac{3}{4}$ には適用できない。しかし $\frac{3}{4} \leq \sigma < 1$ においても, $\sigma_{1-2\sigma}(n)$ の Riesz mean $\int_0^{\xi} \sum_{n \leq t} \sigma_{1-2\sigma}(n)\, dt$ に対する Voronoï 型公式（それは収束する）を用いることによって, (3·1) を示すことができる (Matsumoto-Meurman, 1993).

上からの評価に関しては, (2·5) に対応する結果

$$(3{\cdot}2) \qquad E_\sigma(t) = O(t^{\frac{2}{3}(1-\sigma)+\varepsilon}) \qquad \left(\tfrac{1}{2} \leq \sigma < 1\right)$$

は Ivić-Matsumoto (1996) による。Kačėnas による若干の改良も知られている。また二乗平均についての結果は, まず $\frac{1}{2} \leq \sigma < \frac{3}{4}$ においては

$$(3{\cdot}3) \qquad \int_2^T E_\sigma^2(t)\, dt = A_1(\sigma) T^{\frac{5}{2}-2\sigma} + O(T^{\frac{7}{4}-\sigma+\varepsilon})^{(*)} \qquad \left(\tfrac{1}{2} \leq \sigma < \tfrac{3}{4}\right)$$

である。これは $\sigma = \frac{1}{2}$ の時は Heath-Brown (1978), $\frac{1}{2} < \sigma < \frac{3}{4}$ に対しては筆者(1989)による。続いて Matsumoto-Meurman (1993) により,

$$(3{\cdot}4) \qquad \int_2^T E_{3/4}^2(t)\, dt = A_0 T \log T + O(T(\log T)^{\frac{1}{2}})^{(**)} \qquad \left(\sigma = \tfrac{3}{4}\right)$$

(*) この誤差項は, $\sigma = \frac{1}{2}$ では $O(T \log^4 T)$ (Preissmann, Ivić) に, また $1/2 < \sigma < 3/4$ においては $O(T)$ (Matsumoto-Meurman) に改良されている。

(**) この誤差項も Lam (1997) によって $O(T)$ に改良されている。

(3.5) $\displaystyle\int_2^T E_\sigma^2(t)\,dt = O(T) \qquad (\tfrac{3}{4}<\sigma<1)$

が示された。以上のような結果はすべて，Atkinson 公式(3.1)（及びその種々の refined version）を用いて証明されている。上記(3.3), (3.4)から直ちに $E_\sigma(t)=\Omega(t^{\frac{3}{4}-\sigma})$ $(\frac{1}{2}\leq\sigma<\frac{3}{4})$，$E_{3/4}(t)=\Omega(\sqrt{\log t})$ が従う。(*) よって予想としては

(3.6) (Conjecture) $E_\sigma(t)=O(t^{\frac{3}{4}-\sigma+\varepsilon}) \quad (\frac{1}{2}\leq\sigma\leq\frac{3}{4})$

が妥当である。これらの諸結果により，前節で図示した $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ に対する描像の正確なアナロジーが，$\frac{3}{4}<\sigma<1$ における Ω 結果を除けば，$E_\sigma(t)$ についても成立していることを見てとることができる。

しかし $\frac{3}{4}<\sigma<1$ における結果(3.5)からは，Ω 結果を得ることはできない。約数問題の場合，我々には(2.7)という別の強力な道具があり，それによって(2.8)式を得て，$\Delta_{1-2\sigma}(x)=\Omega(1)$ $(\frac{3}{4}<\sigma<1)$ に到達できたのであるが，$E_\sigma(t)$ について(2.7)に対応する式は知られていない。実際，(3.1)式以外に，我々はこれといった攻略手段を持ちあわせていないのである。

しかしながら極く最近になって Lau は，(3.1)が $\frac{3}{4}<\sigma<1$

(*) Hafner-Ivić は $\sigma=1/2$ のときに $\Omega_\pm$ 結果を出している。$\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}$ においては $E_\sigma(t)=\Omega_\pm(t^{3/4-\sigma}(\log t)^{\sigma-1/4})$ が現在最良である。これは Ω_+ は Matsumoto-Meurman (1993)，Ω_- は Lau-Tsang [11] による。また Lau-Tsang [11] は $\sigma=3/4$ においても $E_{3/4}(t)=\Omega_\pm(\sqrt{\log t})$ を得ている。

においても予想された以上に有効であり，それを用いて興味深い情報を取り出せることを見出しつつある。そこで節を改めて，Lau の仕事と関連する観察について述べよう。

§4. $E^*(t)$ と $E^*_\sigma(t)$.

Lau[9] は $E_\sigma(t)$ の一乗平均に注目し，

$$(4\cdot1)\quad \int_2^T E_\sigma(t)\,dt = -2\pi\zeta(2\sigma-1)T + O(T^{\frac{1}{2}}) \quad (\tfrac{3}{4}\leqq\sigma<1)$$

を証明した。もともとこのような一乗平均は，Hafner-Ivić (1989) が $\sigma=\frac{1}{2}$ の場合に扱い，彼らは

$$(4\cdot2)\quad \int_2^T E(t)\,dt = \pi T + O(T^{3/4})$$

を得ている。続いて Ivić は彼の Tata Lecture Note (1991) において，

$$(4\cdot3)\quad \int_2^T E_\sigma(t)\,dt = -2\pi\zeta(2\sigma-1)T + O(T^{\frac{5}{4}-\sigma}) \quad (\tfrac{1}{2}<\sigma<\tfrac{3}{4})$$

を示している。Lau の (4·1) はもちろん (4·2), (4·3) のアナロジーを狙ったものであるが，Hafner-Ivić が利用している Jutila の結果が使えないところを，Matsumoto-Meurman (1993) の手法を加味して切り抜けるのである。

上記 (4·1) から，$\frac{3}{4}<\sigma<1$ において $E_\sigma(t)=\Omega(1)$ が直ちに従う。これで前節で言及した問題点は解決した，と言いたいと

ころだが，(4·1)～(4·3) の右辺に出てくる，$-2\pi\zeta(2\sigma-1)$ や π といった定数はいったい何だろうか？ 例えば $\Delta(x)$ の場合，

$$(4\cdot4)\quad \int_2^X \Delta(x)\,dx = O(X^{3/4})$$

であって，(4·2)右辺の πT のような項は出てこない。そこで今，$E^*(t)=E(t)-\pi$，$E_\sigma^*(t)=E_\sigma(t)+2\pi\zeta(2\sigma-1)$ $(\frac{1}{2}<\sigma<1)$ と定義してみると，(4·2)は

$$(4\cdot5)\quad \int_2^T E^*(t)\,dt = O(T^{3/4})$$

となり，いかにも(4·4)のアナロジー風の式になる。また(4·1), (4·3)も

$$(4\cdot6)\quad \int_2^T E_\sigma^*(t)\,dt = \begin{cases} O(T^{\frac{5}{4}-\sigma}) & (\frac{1}{2}<\sigma<\frac{3}{4}) \\ O(T^{\frac{1}{2}}) & (\frac{3}{4}<\sigma<1) \end{cases}$$

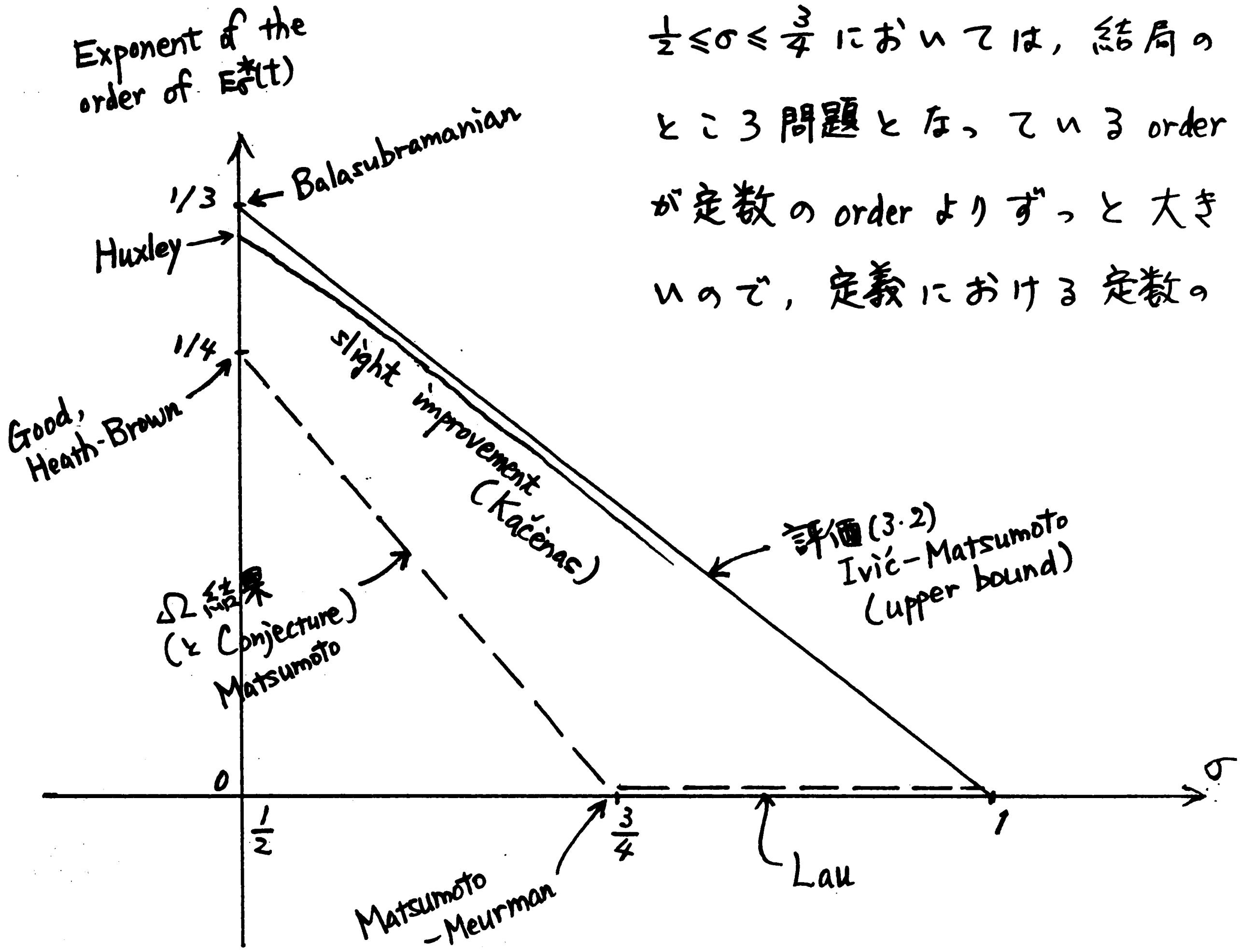
となる。定数 π や $-2\pi\zeta(2\sigma-1)$ は，実は $\Delta(x)$ の定義式(1·1)の中の定数 $\frac{1}{4}$，及び $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ の定義式(1·5)の中の $-\frac{1}{2}\zeta(2\sigma-1)$ に対応するものであって，上に定めた $E^*(t)$ や $E_\sigma^*(t)$ こそが，$\Delta(x)$ や $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ に正しく対応している量ではないだろうか。筆者はこのような観点を既に[12], p.256 に述べている。Lau と筆者とは最近 e-mail でかなりの意見交換をしたが，Lau もほぼ同意見であるように思われる。そして実際，Lau は最新の preprint [10] において，こうした立場を支持する事実と解釈

できる，次の結果を証明した：

$$(4.7) \qquad T \ll \int_2^T E_\sigma^*(t)^2\,dt \ll T. \qquad \left(\tfrac{3}{4}<\sigma<1\right)$$

この右側の不等号は(3.5)からすぐに出るので，新しいのは左側の不等号である。そしてその不等号は $E_\sigma^*(t)=\Omega(1)$ (for $\frac{3}{4}<\sigma<1$) を意味する。ここに至って我々は，§2において描いた $\Delta_{1-2\sigma}(x)$ のorderに関する図の完全なアナロジーが，$E_\sigma^*(t)$ に対して成立していることを示すことができたのである。

今まで主として扱われてきた $\frac{1}{2}\leq\sigma\leq\frac{3}{4}$ においては，結局のところ問題となっているorderが定数のorderよりずっと大きいので，定義における定数の



差は何の問題にもならなかった。Lauの研究によって我々はようやく，定数の差をも考慮すべき，デリケートな領域に足を踏み入れはじめた，ということなのであろう。Lauによる(4.7)の証明は，短区間平均 $\int_T^{T+H}|E(t+u)-E(t)|^2dt$ に関するJutilaの研究(1984)(*)に示唆されたもので，$G_\sigma(t)=\int_2^t E_\sigma^*(u)\,du$ とおくとき，$\int_T^{2T}|G_\sigma(t+u)-G_\sigma(t)|^2dt$ をJutila流に（Matsumoto-Meurman(1994)のアイデアとあわせて）考察することで結果に至っている。

約数問題におけるChowla(-Yanagisawa)の(2.8)と比較すれば，(4.7)を漸近公式に精密化できるだろうと期待するのは自然である。更に大胆に推測すれば，(2.9)の類似として，

$$(4.8)\ (\text{Conjecture})\ \int_2^T E_\sigma^*(t)^2dt = A_2(\sigma)T + A_3(\sigma)T^{\frac{5}{2}-2\sigma} + O(T^{2-2\sigma}(\log T)^c) \quad (\tfrac{3}{4}<\sigma<1)$$

と予想できるかもしれない。これは[12]の予想(5.11)を $E_\sigma^*(t)$ に読みかえたものである。しかし，このような精密な予想の成否を論ずるには，現状では我々の手にしている方法や結果はあまりにも少ない。筆者はいくつかの可能性のあるアプローチについてLauとe-mailのやりとりをしたが，前途に横

(*) このJutilaの結果の $E_\sigma(t)$ でのアナロジーは，$\frac{1}{2}<\sigma<1$ 全域において，Kiuchi-Tanigawa[4]において得られた。

たれる困難は簡単には乗り越えられそうもないように感じられる。

文　献(*)(**)

[1] T. Hattori and K. Matsumoto, A limit theorem for Bohr-Jessen's probability measures of the Riemann zeta-function, J. Reine Angew. Math. 507 (1999) 219-232.

[2] Y. Kasahara, Tauberian theorems of exponential type, J. Math. Kyoto Univ. 18 (1978) 209-219.

[3] M. Katsurada and K. Matsumoto, A weighted integral approach to the mean square of Dirichlet L-functions, in "Number Theory and its Applications" (S. Kanemitsu & K. Györy eds.), Developments in Math. Vol. 2, Kluwer Acad. Publishers, 1999, pp. 199-229.

[4] I. Kiuchi and Y. Tanigawa, The mean value theorem of the Riemann zeta-function in the critical strip for short intervals, ibid., pp. 231-240.

(*) Abstract に述べたように本稿は基本的には筆者の survey [12] への補足である。従って [12] に引用してある文献については，[12] での引用が「to appear」とか「preprint」になっているものを除いては，引用しなかった。本文中に言及のある結果で文献が明記されていないものについては [12] を参照していただきたい。[12] には，本稿では言及できなかった，関連する種々の結果の紹介もある。

(**) 本稿では指標をつけた和や Dirichlet の L 関数への一般化には全く言及しなかったが，いくつか基本的な研究が出てきており，今後の発展が期待される。文献表中の Katsurada-Matsumoto [3]，Nakaya [13]，Tanigawa [16] を参照されたい。

[5] Y.-K. Lau, On a generalized divisor problem I, preprint.

[6] Y.-K. Lau, ——— II, preprint.

[7] Y.-K. Lau, On the limiting distribution of a generalized divisor problem for the case $-\frac{1}{2} < a < 0$, Acta Arith., to appear.

[8] Y.-K. Lau, On the limiting distribution of a generalized divisor problem for the case $-1 \leq a < -\frac{1}{2}$, Acta Arith., to appear.

[9] Y.-K. Lau, A study on the mean value of the error term in the mean square formula of the Riemann zeta-function in the critical strip $\frac{3}{4} \leq \sigma < 1$, preprint.

[10] Y.-K. Lau, On the error term of the mean square formula of the Riemann zeta-function in the critical strip $\frac{3}{4} < \sigma < 1$, preprint.

[11] Y.-K. Lau and K.-M. Tsang, $\Omega_\pm$-results of the error term in the mean square formula of the Riemann zeta-function in the critical strip, Acta Arith., to appear.

[12] K. Matsumoto, Recent developments in the mean square theory of the Riemann zeta and other zeta-functions, in "Number Theory" (R.P. Bambah, V.C. Dumir & R.J. Hans-Gill eds.), Hindustan Book Agency & Indian National Science Academy, distributed (outside India) by Birkhäuser, 2000, pp. 241-286.

[13] H. Nakaya, The mean square of the Dirichlet L-functions in the critical strip, Liet. Matem. Rink. 40 (2000) 201-213. (= which

will also appear in Lithuanian Math. J.)

[14] Y.-F.S. Pétermann, Divisor problems and exponent pairs, Arch. Math. 50 (1988) 243–250.

[15] Y.-F.S. Pétermann, Divisor problems and exponent pairs: On a conjecture by Chowla and Walum, in "Prospects of Mathematical Science" (T. Mitsui et al. eds.), World Scientific, 1988, pp. 211–230.

[16] Y. Tanigawa, Divisor problem with characters, 数理解析研究所講究録 1091 (1999) 1–8.

[17] N. Yanagisawa, An improvement on the mean square theorem in a divisor problem, preprint.

追記：講演終了後に金光滋氏から，「$E^*(t)$, $E^*_\sigma(t)$ が真の error term ではないか？」という本稿の議論は，Pétermann [15] にある "primary error term" の立場で解釈できるのではないか，と御教示いただいた。Pétermann はこの論文の §1 で，「真の」（彼の言葉では "primary な"）error term とは何であるべきかを一般的に論じている。本稿の (4.1)〜(4.3) は，[15] の (1.5) の意味で $E(t)$, $E_\sigma(t)$ が primary error term ではないことを示している。そして [15] の p.214，18〜19行目と同様の意味で，$E^*(t)$, $E^*_\sigma(t)$ こそが Pétermann のいう primary error term になっていることがわかる。